

QUASICRYSTAL -

3次元準結晶シミュレーター 技術・理論文書

本書は、ウェブブラウザ上で3次元の非周期的タイリング（アマン・マッカー・タイリング）をリアルタイムに生成・描画するアプリケーション「QUASICRYSTAL」の理論と実装を解説した文書です。

特に**「なぜ高次元空間が必要なのか」「5次元・6次元からどのように2次元・3次元の図形が生まれるのか」**という数学的理論の核心について、高校数学（ベクトルや図形の性質）の視点から詳細に紐解きます。

1. アプリケーション機能概要

本アプリは、6次元空間の規則正しい整数格子を3次元空間に射影することで得られる「決して周期的に繰り返さないが、一切の隙間なく空間を埋め尽くす」立体パズルをインタラクティブに観察できるツールです。

- **直感的操作:** ドラッグで回転の一時停止、タップで再開。ダブルタップによる展開（爆発）アニメーション。
- **光学表現:** PBR（物理ベースレンダリング）によるクリアコートと、OKLCH色空間を用いた調和のとれたパレットによるクリスタル質感を実装しています。
- **内部構造解析:** スライス（断面）表示や、2種類のブロックの分離（Split）表示により、複雑なネットワーク骨格を視覚的に理解できます。

2. 数学理論詳細：高次元空間からの贈り物

準結晶のパターン（ペンローズ・タイリングなど）を理解するための最も強力な数学的武器が**「切断射影法（Cut-and-Project Method）」**です。

2.1 準備：なぜ「高次元」が必要なのか？（対称性の問題）

私たちは2次元（平面）や3次元（空間）に住んでいます。これらの空間を同じ形のタイルで「周期的に（規則正しく）」埋め尽くそうとしたとき、許される回転対称性は限られています。

- 正三角形（3回対称＝120度回転で重なる）
- 正方形（4回対称＝90度回転で重なる）
- 正六角形（6回対称＝60度回転で重なる）

しかし、**正五角形（5回対称＝72度回転で重なる）**では絶対に隙間ができてしまい、周期的に埋め尽くすことはできません（結晶学の制限定理）。

では、どうすれば「5回対称性」を持つパターンを作れるのでしょうか？

数学者たちは逆転の発想をしました。「5回対称性が自然に許されるような、より高い次元の

空間」で完璧な周期構造（格子）を作り、それに特定の角度で光を当てて、私たちの世界（2次元や3次元）に「影」を落とせばよいと考えたのです。

2.2 【図解】5次元から2次元への射影（ペンローズ・タイル）

2次元の非周期的タイリングである「ペンローズ・タイル」は、5次元空間から生まれます。順を追って解説します。

① ベクトルの「過剰な」配置

平面（2次元）上の点は、普通 x 軸と y 軸の「2つのベクトル」があればすべて表現できます。

しかしここで、あえて平面上に正五角形の頂点に向かう「5つのベクトル」 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5$ を均等（72度ごと）に配置してみます。

平面上では、この5本は明らかに「多すぎ（過剰）」です。どれか2本があれば残りの3本は作れるからです。

② 5次元の「影」とみなす

ここで想像力を飛躍させます。この平面上の5つのベクトルは、実は**「5次元空間にある、互いに直交する（90度で交わる）5本の基本軸の、2次元平面への影」**なのだと考えます。

5次元空間 $\mathbb{R}^5$ には、 $(1, 0, 0, 0, 0)$ から $(0, 0, 0, 0, 1)$ までの独立した5つの軸があります。この5次元空間内に、ある特定の「傾き」を持った2次元の平面（スクリーン）をスッと差し込みます。

上から光を当てると、5次元の直交する軸の影が、スクリーン上では「72度ずつ開いた5つのベクトル」として映るように、絶妙な角度でスクリーンを傾けるのです。（この傾きの計算には黄金比 ϕ が深く関わります）。

③ タイルの誕生

5次元空間には、5つの軸を基準としたジャングルジムのような「格子点（整数座標）」が無限に広がっています。ここからタイルが生まれます。

- 5次元空間における「面（正方形）」は、5つの軸のうち「2つ」を選んで作られます（例： x_1 軸と x_2 軸で作る面）。選び方は ${}_5C_2 = 10$ 通りです。
- この5次元の正方形を、先ほどの2次元スクリーンに影として落とすと、**「ひし形」**になります。
- 選んだ軸の組み合わせによって、影の形は**「太いひし形」と「細いひし形」**のちょうど2種類になります。

④ 窓（受容領域）による切断

5次元の格子点をすべてスクリーンに影を落とすと、点が多すぎて真っ黒に塗りつぶされてしまいます。そこで、スクリーンに「ある一定の幅の厚み（窓）」を持たせます。

この**「厚みの中に入った格子点」の影だけをスクリーンに描画する**というルールにします。スクリーンの傾きが黄金比（無理数）を含んでいるため、格子点は決して周期的なタイミングで厚みの中に入りません。

結果として、2種類のひし形が隙間なく、かつ決して周期的に繰り返さないパターンとしてスクリーン上に敷き詰められます。これがペンローズ・タイルの正体です。

2.3 【図解】 6次元から3次元への射影（本アプリの立体）

本アプリで描画している3次元の準結晶（アマン・マッカー・タイリング）は、先ほどのロジックを1つ上の次元へ引き上げたものです。**6次元空間から3次元空間への射影**です。

① 正二十面体と6つのベクトル

3次元空間において「5回対称性」を最も美しく内包している立体が**正二十面体**です。

正二十面体には12個の頂点があります。向かい合う頂点を結ぶ対角線を引くと、全部で**6本の軸**ができます。この6本は、それぞれが5回対称の回転軸になっています。

② 6次元空間からの影

3次元空間では通常 x, y, z の3本のベクトルで十分ですが、この「6本の軸」に沿ったベクトルを $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6$ とします。

ペンローズの時と同じように、**「この3次元上の6本のベクトルは、6次元空間 $\mathbb{R}^6$ における直交する6つの基本軸の影である」**とみなします。

6次元空間を、私たちの生きる「3次元の物理空間」と、見えない「3次元の余剰空間（直交空間）」にスッパリと二等分（切断）します。

$$\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3(\text{物理空間}) \oplus \mathbb{R}^3(\text{余剰空間})$$

③ ブロック（菱形六面体）の誕生

6次元空間の格子点で作られる「3次元の立方体（ブロック）」を考えます。6次元には6つの軸があるので、その中から「3つ」を選ぶと3次元の立方体ができます。

選び方は ${}^6C_3 = 20$ 通りあります。

この6次元の立方体を、私たちの3次元物理空間に影として落とします。すると、立方体は少し歪んだ**「菱形六面体（すべての面がひし形のサイコロ）」として映ります。計算してみると、この20通りの影の形は、体積が大きな「太いブロック」と、体積が小さな「細いブロック」**のちょうど2種類に分類されることがわかります。（※これがアプリ内で青と黄色で描画されている2種類のブロックです）。

④ なぜ「隙間がない」のか？なぜ「非周期的」なのか？

6次元空間の格子点を選ぶ際、見えない余剰空間側に「窓（一定の大きさの領域）」を設定し、その窓の内部にある点だけを物理空間に射影します。

- **隙間がない理由:** 高次元空間のジャングルジム（格子）は元々一切の隙間なく空間を埋め尽くしています。適切な「窓」の条件を設定して射影すれば、その位相的つながりは保たれ、3次元上でも隙間なく噛み合います（これをDe Bruijnの定理により数学的に保証しています）。
- **非周期的になる理由:** 6次元から3次元を切り出す際の「スクリーンの傾き」に黄金比 ϕ が含まれています。有理数（分数）で表せない無理数の傾きであるため、高次元の格子点とスクリーンが周期的に一致することが永久にありません。

3. アプリケーション内のアルゴリズム構造（算法）

上記のような高次元の影を、ブラウザ上でリアルタイム（毎秒60フレーム）で計算・描画するために、アプリ内では以下の最適化を行っています。

3.1 N.G. de Bruijn の双対格子法（五格子/六格子法）

6次元の点すべてを調べてから「窓」に入るかを判定するのは、計算量が天文学的になりすぎます。

そこで、数学者 N.G. de Bruijn が考案した手法を使い、**最初から3次元空間上で直接ブロックの頂点を計算するアプローチ（双対法）**をとっています。

1. 3次元空間内に、6つのベクトル $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_6$ にそれぞれ垂直な「等間隔の平面の束（グリッド）」を6セット用意します。
2. このうち、任意の「3つの平面」が交わる点 $\vec{P}$ を探します。これは3変数の連立一次方程式を解くことと同じです（アプリ内の solve3x3 関数）。
3. この交点 $\vec{P}$ の座標を使って、対応する「6次元空間での座標インデックス K 」を逆算します。
4. この計算によって得られた点が、「窓」の判定を最初からクリアしている有効な頂点となります。

3.2 位相シフトと理論的ドリフトの相殺（アニメーションの秘密）

UIの「6D Phase Shift」を動かすと、6次元空間の中で3次元スクリーン（切断面）をスライドさせることができます。

しかし、そのままスライドさせると方程式の解全体がズれてしまい、3次元上では図形全体が画面外へ平行移動（ドリフト）してしまいます。

これを防ぐため、アプリ内では位相 γ_i の変化量から**「理論上の並進ドリフトベクトル」**を以下のように解析的に算出し、

$$\vec{T}_{drift} = \sum_{i=1}^6 \gamma_i \vec{v}_i$$

このベクトル分だけ図形全体を常に逆方向へ引き戻しています。これにより、図形全体は画面の中央（原点）に完全に固定されたまま、**内部のブロック構成だけがパタパタと入れ替わる魔法のような現象（フォゾン・フリップ）**を視覚化することに成功しています。

4. 結語

私たちが画面で見ている青と黄色の複雑なブロックの絡み合いは、単なるランダムな配置ではありません。

それは**「目に見えない6次元の完全な秩序（周期性）が、無理数の角度で切り出されたことで生じた、3次元空間の美しい影」**なのです。

数学理論とプログラムのアルゴリズムが一致したとき、ブラウザの中に宇宙の幾何学原理が具現化されます。